Title	プラズマにおける高次元局在構造とその安定性について(ポスターセッション,基研短期研究会「複合系における動力学の新展開」,研究会報告)
Author(s)	西成, 活裕; 矢嶋, 徹
Citation	物性研究 (1995), 63(5): 546-550
Issue Date	1995-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/95478
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

プラズマにおける高次元局在構造とその安定性について

東大工　西成活裕、矢嶋徹

1．はじめに

プラズマは非線形現象の宝庫である。それゆえ解析的取り扱いは特殊な場合を除いて困難であり、まだよく分かっていない現象も多い。したがって本質的な非線形現象は数値シミュレーションがその研究の主体になっている。これに対して近年、非線形のダイナミクスを解析的に扱うソリトン理論が発達してきた。この理論はこれまで、主に空間1次元のダイナミクスの解析に成功していたが、最近空間2次元以上での新しいソリトン理論の成果が出てきた。これらの成果は現在、一部の数理学者の中だけでとどまっており、これらの応用は未知数である。これらの新しい概念や手法を用いて基礎的側面からプラズマの非線形現象を解析し、その応用の可能性を探ってゆきたい。今回は、イオン波の高次元非線形ダイナミクスに関してソリトン理論を用いて様々な角度から解析してゆく。

2．基礎方程式とドロミオン

イオン運動に対して流体の方程式を用いる。イオンの運動のスケールを考えているので、電子はボルツマン分布をしていると考えられる。さらに、イオンの温度は一般に電子の温度に比べて低いのでその効果を無視する。この状況を記述する無次元化された方程式系は、連続、運動、ポアソン方程式で、

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\mathrm{div}(n\mathbf{v})=0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v}=-\mathrm{grad}\,\phi+a(\mathbf{v}\times\mathbf{b})$$

$$\Delta\phi=\exp\phi-n$$

となる。ここで、$n,\mathbf{v}$はそれぞれ、イオンの密度、速度であり、ϕは静電ポテンシャル、　$\mathbf{b}=(1,0,0)$は外磁場を表す。また、$a=\frac{\omega_i}{\Omega_i}$であり、$\omega_i=\frac{ZeB_0}{Mc}$（イオンサイクロトロン振動数）、$\Omega_i^2=\frac{4\pi n_0 Ze}{M}$（イオンプラズマ振動数）の比を表す。

この系に関しては線形モードは2つ存在し、低周波と高周波のモードがある。低周波のモードについてこれまでにたくさんの研究がなされており、その非線形のダイナミクスを表すものとして有名なKP方程式や、ZK方程式が導かれている。特にZK方程式については3次元空間に局在する安定な解の存在が知られており、プラズマのダイナミクスと絡んで興味が持たれている「1」。

しかし、高周波のモードについてはこれまであまり研究がなく、今回はこのモードの解析に焦点を当てた。

この系に、はじめ定常状態からある波数を持つイオン波を励起する。この波の振幅の包絡線の変調を記述する式を導出しよう。それには、物理量$n,\mathbf{v}$やϕをその定常値のまわりでεによる展開をして基礎方程式に代入し、各εの次数ごとに式をまとめて閉じ

た式を求めてゆけばよい（逓減摂動法）。今回考えるのは比較的高周波のモードであり、包絡線変調を見るためある波数のキャリア波で展開する。

波の郡速度で動く系から見ると包絡線の変調はゆるやかなので、$\xi=\varepsilon(x-V_{gx}t)$, $\eta=\varepsilon(x-V_{gy}t),\zeta=\varepsilon z,\tau=\varepsilon^2 t$という変数を導入し、振幅を

$$n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{l=-\infty}^{\infty}n_l^{(n)}(\xi,\eta,\zeta,\tau)\exp\left[il\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t\right)\right]$$

という形で展開する[2]。

ただし、外磁場と波数ベクトル$\mathbf{k}=(k_x,k_y,0)$で張られる面をｘｙ平面とし、外磁場B_0をｘ軸方向に取って考える。

εの１次の関係式より、線形分散関係式

$$\omega^4-\left(1+\frac{|\mathbf{k}|^2}{1+|\mathbf{k}|^2}\right)\omega^2+a^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{k})^2\left(\frac{1}{1+|\mathbf{k}|^2}\right)=0$$

を得る。そしてさらにεの３次まで計算すると次の閉じた連立非線形方程式[2]

$$iA_\tau+c_1A_{\xi\xi}+c_2A_{\eta\eta}+c_3A_{\zeta\zeta}+c_4A_{\xi\eta}+c_5|A|^2A+c_6QA=0$$
$$(1-v_{gx}^2)Q_{\xi\xi}-2v_{gx}v_{gy}Q_{\xi\eta}-v_{gy}^2Q_{\eta\eta}+c_7|A|^2_{\xi\xi}+c_8|A|^2_{\xi\eta}+c_9|A|^2_{\eta\eta}=0$$

を得る。ここで、$\mathrm{A}=\mathrm{n}_1^{(1)},\mathrm{Q}=\mathrm{n}_0^{(2)}-\alpha\mathrm{v}_{x0}^{(2)}$であり、$\alpha$や$\mathrm{C_i}$はキャリア波の波数や、磁場の大きさの関数であり、$\mathbf{V}_\mathbf{g}$は系の郡速度である。

以下では系のζ依存性は無視して、ｚ方向は一様として空間２次元で考えてゆく。この方程式は、適当な独立変数の１次変換などによって、Davey-Stewartson（ＤＳ）方程式といわれる（２＋１）次元可積分方程式に帰着できることが分かる。このＤＳ方程式は最近ソリトン理論の発展により、新しい厳密解がいろいろ見つかっている[3]。以下、これらのソリトン理論の成果も利用して、このイオン波の高次元非線形ダイナミクスを物理的に解析してゆこう。

外部から定磁場がかかっているときのイオン波の振る舞いについては、キャリア波の方向と磁場とのなす角度によって一般にその性質は変化する。ここでは、キャリア波が磁場に対して垂直に伝播するときについて考えよう。ただしこのときは、厳密にはポアソン方程式は使えなくなる。なぜならイオンのラーマー半径に比べて電子のそれは小さいので、電子は、磁力線に沿った方向以外ではボルツマン分布ができないからである。よって、垂直からのずれがイオンと電子の熱速度の比程度以上でないとポアソン方程式は成立しない。だが、この比はかなり小さく、今回の摂動論の範囲内ではゼロとみなせるので、垂直伝播をこの意味で考えてゆけることになる。

このとき、先ほどの方程式は

$$iA_t+\sigma_1A_{xx}+\sigma_2A_{yy}+\sigma_3|A|^2A+\sigma_4AQ=0$$
$$Q_{xx}+\delta_1Q_{yy}+\delta_2(|A|^2)_{xx}=0$$

となる。ただしσ_i,δ_iは、波数k_yと磁場の大きさとイオン密度の比を表わすパラメーターaの関数である。[2] 今度は方程式はＤＳ方程式の標準形になっている。興味深いのはAの時間発展の方が楕円型、Qの方が双曲型のときである。このときはＤＳ１型と言われ、２次元空間に局在するソリトン解があることが最近示されている「3」。これはドロミオンといわれ、このＤＳ１型に特有な厳密解で現在までで高次元における局在モードソリトンの唯一の例である。

この解は数理的に導出されたものであるが、物理的に考えた場合、どういう時にどのようなメカニズムで生まれ得るのかを以下調べてゆく。

まず、この方程式の平面波解の安定性について考えてみよう。
平面波解は

$$A=A_0\exp i(p_1x+p_2y-\omega t+\theta_0)\ ,\ Q=Q_0$$

である。ただし分散$\omega=\sigma_1p_1^2+\sigma_2p_2^2-\sigma_3A_0^2-\sigma_4Q_0$を満たす。この解の振幅と位相に変調を加える。これは$A',\theta',Q'\sim\exp i(\mu_1x+\mu_2y-\nu t)$として

$$A=(A_0+A')\exp i(p_1x+p_2y-\omega t+\theta_0+\theta')\ ,\ Q=Q_0+Q'$$

とする。

ここで、νに虚部が生じない条件より、次の変調安定条件

$$-\left(\mu_1^2\sigma_1+\mu_2^2\sigma_2\right)\left(-\mu_1^2\sigma_1-\mu_2^2\sigma_2+2\sigma_3A_0^2-2A_0^2\sigma_4\frac{\mu_1^2\delta_2}{\delta_1\mu_2^2+\mu_1^2}\right)>0$$

を得る。ここで、さらに長波変調について考えよう。

1）$\mu_2=0$，$\mu_1\to0$のとき（自己集束、横不安定性）

$$-\sigma_1(\sigma_3-\sigma_4\delta_2)>0$$

2）$\mu_1=0$，$\mu_2\to0$のとき（自己捕捉、縦不安定性）

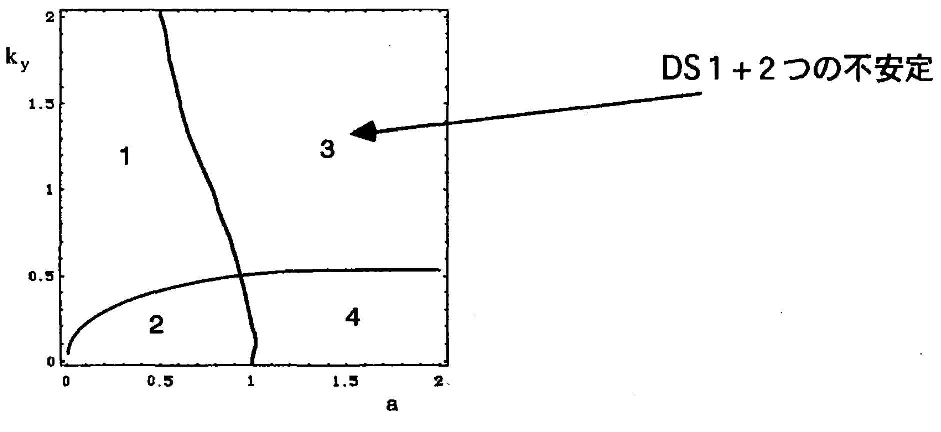
$$-\sigma_2\sigma_3>0$$

さて、次にこの方程式がDS１になり得る条件について見てみよう。それは、

$$\sigma_1\sigma_2>0$$

であることが分かる。（つねに$\delta_2<0$であり、あとはA_{xx}とA_{yy}の符号が等しければよいから。）

以上３つの不等式を実際の係数を当てはめて図示すると下図になる。



ここで、横軸は磁場の大きさとイオン密度の比を表わすパラメーターaであり、縦軸はキャリア波の波数k_yである。そして、

自己集束不安定.....領域3、4
自己捕捉不安定.....領域1、3
DS 1条件.....領域2、3

となることが分かる。これらより以下の重要な結論に達する。

領域3で自己集束と自己捕捉が同時に起こりうることは、つまり横と縦から平面波が同時に狭くなり成長していくことである。そして、いずれ非線形飽和が起こるので局在構造の形成の可能性がある。しかも領域3ではこの2つの不安定性が起こると同時に、方程式がDS 1条件を満たす。つまり、この領域で適当な境界条件を外から与えてやれば、この局在構造はドロミオンになり得る可能性があると思われる。
以上がこの系でのドロミオンの物理的解釈である。

3. 局在構造の安定性について

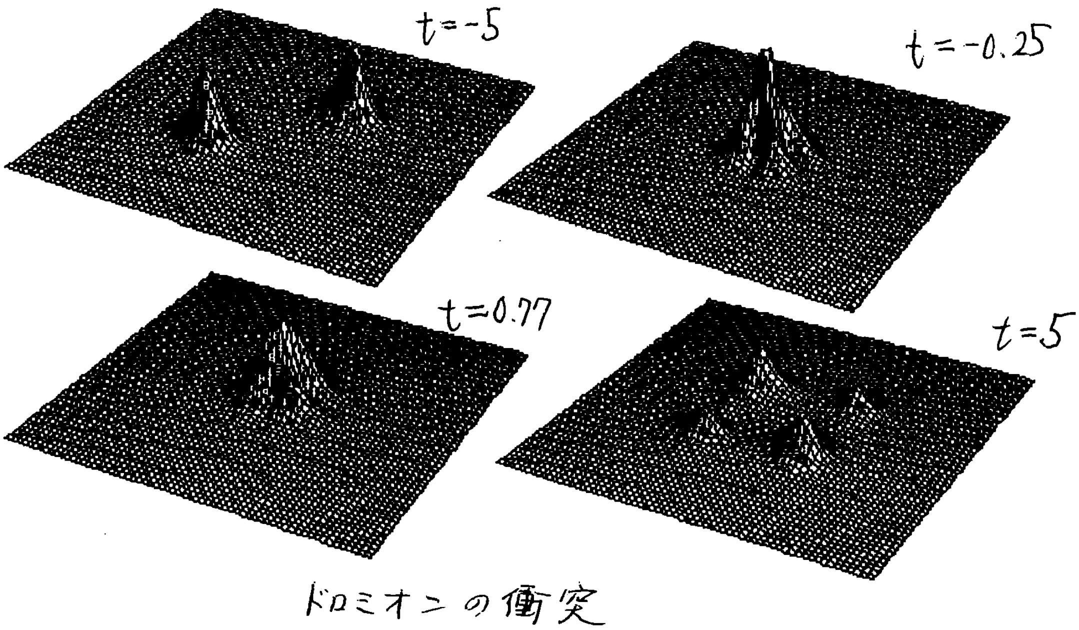
さて、このドロミオン解は果たしてどの程度安定なのであろうか、という問題がある。厳密解があるからといってそれは安定であるとは限らない。ドロミオンが現実に観測され、応用されるためにはKdVやNLS方程式のソリトンのようにかなりの安定性が必要である。これら1次元のソリトンはお互い同士のの衝突に対しても安定である。ドロミオンについてこれらのことを調べよう。

小さな擾乱に対する解の安定性は通常解析的に取り扱える。それは直接摂動法を用いるか、リャプノフの方法がある。前者は、一般的であるが途中で変係数の線形微分方程式を解かなくてはならない。これはいつもできるとは限らない。後者は考えている方程式がハミルトニアンを持つときには強力な手法である[4]。しかし、ドロミオン解の時のＤＳ１方程式はハミルトニアンが存在しない[5]、[6]。さらに今回はドロミオン同士の衝突にたいする安定性を調べることもあり、このような場合には摂動法は使えない。よって、数値計算によってその安定性を様々な角度から調べることにする。ひとつ注意しておくのは、ドロミオン同士の衝突を表す多ドロミオンの厳密解が解析的にきちんと求められているが、今回我々が数値計算で調べたい衝突はこれではなく、２つの１ドロミオン解の単なる重ね合わせによる衝突を考えたいということである。この状況はもちろん厳密解とは振る舞いは異なり、前述の通り数値計算でしか取り扱えないものである。

数値計算は高精度で行われなくてはならない。そのため、NLS型に相性のいい擬スペクトル法を用いて、時間発展は適応刻み幅制御付きのBS法を用いた。

まず、単なる１ドロミオン解を走らせてみた結果は、小さな擾乱に対してはリャプノフの意味で安定に走ることが分かった[5]。

次に衝突に対する安定性であるが、このときは衝突後も個性を保つわけではなく途中で非弾性散乱をして２個のドロミオンが最終的に４つの安定なパルスになることが分かった。衝突後に完全に散乱して局在構造が消えてしまうというわけではなく、２個が４個になるという普遍的な法則があることが分かった。さらにこの衝突途中にはパルスの一定周期の振動があり、この周期とドロミオンの相対速度のかねあいで４つのパルスへの別れ方が決まることが判明した[6]。このようなことは多ドロミオンの厳密解から予測するのは困難である。以上のことによりこの解はある意味でかなりの安定性を持つといってよいと考えられる。



ドロミオンの衝突

4. まとめ

本論文では静電イオン波の高次元ダイナミクスをソリトン理論を用いて解析した。そして縦磁場中を垂直に伝播する静電イオンサイクロトロン波についてはその方程式のタイプがＤＳ１型になり得ることが分かった。この型の方程式は現在まで水の波の表面波でしか理論的に導かれていなかったが、今回これをプラズマ物理で導出することに成功した。そしてこの方程式特有の厳密解であるドロミオンは、物理的には変調不安定と自己集束が同時に起こり、それが非線形飽和してできる局在構造である、という解釈を得た。ドロミオンといわれる高次元局在構造は、全く新しい概念の非線形現象であり、これからの応用が期待される。

次にこの構造の安定性であるが、これも様々な角度からの数値計算を行った結果、安定であることが結論できた。このドロミオン同士の衝突に関する計算では、始め２つのドロミオンが衝突の結果４つに分かれることが分かった。この一種の非弾性散乱は理論的に見ても興味深いものであると思われる。

5. 参考文献

[1] V.E.Zakharov and E.A.Kuznetsov, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 66 (1974) 594.
[2] K.Nishinari, K. Abe and J.Satsuma, Phys. Plasmas, 1 (1994) 2559.
[3] M.Boiti, J.J.-P.Leon, L.Martina and F.Pempinelli, Phys.Lett.A 132 (1988) 432.
[4] E.A.Kuznetsov, A.M.Rubenchik and V.E.Zakharov,Phys.Rep. 142 (1986) 103.
[5] K.Nishinari and T.Yajima, to be published in J. Phys. Soc. Jpn.
[6] K.Nishinari and T.Yajima, preprint.